Устойчивость кольца под действием периодической нагрузки

Михайлов А.В.

Физико-математический институт, Коми Научный Центр УрО РАН, ул. Коммунистическая, 24,

г. Сыктывкар, 167982, Россия

e-mail: `alexvm2008@mail.ru`

Рассматривается задача об устойчивости кольца радиуса R, подкрепленного нитями с жесткостью c, находящегося под действием периодической нагрузки. Пусть s – длина дуги кольца, ϑ – центральный угол, отсчитываемый от оси x, $\varphi(s)$ – угол между касательной к деформированной оси кольца и осью абсцисс, w – перемещения точек кольца по нормали к недеформированной оси кольца, v – перемещения точек кольца по касательной.

Для получения уравнений колебания кольца применяется принцип наименьшего действия [?]:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{R\rho}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) d\vartheta - \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta - \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta + \right.$$
$$\left. + \frac{P(1-\cos(\omega t))}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - k_0 w^2) d\vartheta \right] dt.$$

Разлагаем перемещения v и w в ряд Фурье и выписываем для функционала уравнения Эйлера-Остроградского, которое сводится к уравнению Матье [?]:

$$\ddot{A}_k + (\alpha + \beta cos(2\tau))A_k = 0, \tag{1}$$

Для определения области устойчивых колебаний кольца, находим фундаментальную матрицу решений $\Phi(t)$ для уравнения (1). Тогда $\Phi(T)$ называется матрицей монодромии [?], где T – период системы.

Получив матрицу монодромии, условие устойчивости колебаний можем задать неравенством: $|\sigma| \leq 2$, где σ – след матрицы монодромии.

Литература

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Гос.изд-во физ.-матем. Литературы, 1961.

2. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы в физике. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1972.

3. Лерман Л.М. Линейные дифференциальные уравнения и системы. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012.