Моделирование многочленов со случайными коэффициентами с помощью многочленов со специальными рациональными коэффициентами

Берник В.И.

Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова 11, Минск, 220072, Беларусь
e-mail: bernik.vasili@mail.ru

Гусакова А.Г.

Институт математики НАН Беларуси, ул. Сурганова 11, Минск, 220072, Беларусь
e-mail: gusakova.anna.0@gmail.com

Различные задачи, связанные с распределением корней многочленов со случайными коэффициентами, рассматриваются в теории вероятностей уже более 80 лет [1, 2]. В то же время в теории диофантовых приближений уже более 50 лет изучается распределение алгебраических чисел, которые являются корнями многоченов с целыми коэффициентами. Для этого используются свойства дискриминантов и результантов целочисленных многочленов, которые могут быть записаны в виде определителей матриц, составленных из коэффициентов многочленов [3].

Пусть $Q > 1$ и $n \geq 2$ натуральные числа, $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами степени n и высоты $H = H(P) = \max\limits_{0 \leq j \leq n} |a_j|$. Рассмотрим классы многочленов

$$\mathcal{T}_n(Q) := \left\{ T(x) = \frac{a_n}{Q} x^n + \ldots + \frac{a_1}{Q} x + \frac{a_0}{Q} : |a_i| \leq Q,\, a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Векторы $A_Q = (\xi_n, \ldots, \xi_0) = \left(\frac{a_n}{Q}, \ldots, \frac{a_0}{Q}\right)$ будем рассматривать как случайные векторы с независимыми равномерно распределенными координатами и вероятностями $\mathbb{P}\left(\xi_i = \frac{a_i}{Q}\right) = \frac{1}{2Q+1}$.

Обозначим через μB меру Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Пусть $I \subset \mathbb{R}$ конечный интервал длины μI. Существуют положительные $\delta_0 = \delta_0(n)$ и $c_0 = c_0(n)$ такие, что при $x \in B \subset I$ и $1 \leq m \leq n$ найдется многочлен $T \in \mathcal{T}_n(Q)$, удовлетворяющий системе неравенств*

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{-v_0} < |T(x)| < c_0 Q^{-v_0}, \\ \delta_0 Q^{-v_j} < |T^{(j)}(x)| < c_0 Q^{-v_j}, \quad 1 \leq j \leq m, \\ v_j \geq 0, \quad v_0 + \ldots + v_m = n - m, \end{cases}$$

Теорема 2. *Обозначим через $D(T)$ дискриминант многочлена $T(x)$. Тогда справедлива оценка*

$$\# \left\{ T \in \mathcal{T}_n(Q) : 0 \neq |D(T)| \leq Q^{-2u}, 0 \leq u \leq n-1 \right\} > c_1(n) Q^{n+1-\frac{n+2}{n}u}.$$

Литература

1. Bloch A., Polya G., «On the roots of certain algebraic equations», *Proc. London Math. Soc.*, 33, 102–114 (1932).
2. Ibragimov I., Zaporozhets D., «On distribution of zeroes of random polynomials in complex plane», *Prokhorov and contemporary probability theory, Springer Proc. Math. Stat.*, 33, 303–323 (2013).
3. V. Beresnevich, V. Bernik and F. Götze, «Integral polynomials with small discriminants and resultants», *Adv. Math.*, 298, 393–412 (2016).